Proponowane Rozwiązania

Zadanie 1. *Oblicz granicę*

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\cos(x) + 2x\tan(x) - e^{-x} - e^{x}}{x^4\cos(x)}$$

Rozwiązanie: Będziemy rozwijać poszczególne funkcje w ich wielomiany Taylora z resztą Peano. Oczywiście pojawia się pytanie do którego wyrazu należy rozwijać. W tym zadaniu przez zapis $f(x) \sim g(x)$ będziemy rozumieli $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, natomiast przez $o(x^n)$ będziemy oznaczać takie funkcje f, dla których $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^n} = 0$. Zauważmy, że mianownik jest rzędu x^4 (istotnie mamy $\cos(x) \sim 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$), więc wydaje się rozsądne rozwijać licznik do $o(x^4)$. Odpowiednie rozwinięcia to:

$$\cos(x) \sim 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$$

$$x\tan(x) \sim x^2 + \frac{x^4}{3} + o(x^4)$$

$$(e^x + e^{-x}) \sim 2 + x^2 + \frac{x^4}{12} + o(x^4)$$

Zatem:

$$\frac{2\cos(x) + 2x\tan(x) - (e^x + e^{-x})}{x^4\cos(x)} \sim \frac{2 - x^2 + \frac{x^4}{12} + 2x^2 + \frac{2x^4}{3} - 2 - x^2 - \frac{x^4}{12} + o(x^4)}{x^4 + o(x^4)}$$

Wyrażenie po prawej stronie upraszcza się do

$$\frac{\frac{2x^4}{3} + o(x^4)}{x^4 + o(x^4)} \sim \frac{2}{3} \cdot \frac{1 + \frac{o(x^4)}{x^4}}{1 + \frac{o(x^4)}{x^4}}$$

W związku z czym szukana granica to $\frac{2}{3}$

Zadanie 2. *Znaleźć liczby* $p, q \in \mathbb{Z}$ *dla których*

$$|\sin(\frac{1}{2}) + \cos(\frac{1}{2}) - \frac{p}{q}| < \frac{1}{1000}$$

Rozwiązanie: Przypomnijmy rozwinięcia funkcji $\sin, \cos$ w wielomiany Taylora (w punkcie 0) z resztą Lagrange'a.

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{-\sin(\xi_x)}{6!}x^6$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{-\sin(\zeta_x)}{5!}x^5$$

gdzie (przyjmijmy $x \in (0, \frac{1}{2}]$ bo i tak nas punkt $x = \frac{1}{2}$ interesuje) $\xi_x, \zeta_x \in [0, x]$. Zauważmy, że dla $\xi_x, \zeta_x \in [0, x] \subset [0, \frac{1}{2}]$ mamy:

$$|\frac{-\sin(\zeta_x)}{5!}x^5| \leq \frac{1}{5! \cdot 2^5} = \frac{1}{120} \cdot \frac{1}{32} \leq \frac{1}{3000}$$

podobnie:

$$|\frac{-\sin(\xi_x)}{6!}x^6| \leq \frac{1}{6! \cdot 2^6} \leq \frac{1}{3000}$$

Oznacza to w szczególności, że dla $x \in (0, \frac{1}{2}]$ zachodzi (nierówność trójkąta):

$$|\sin(x) + \cos(x) - (1 + x - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!})| \leq \frac{2}{3000} < \frac{1}{1000}$$

Podstawiając w powyższe $x = \frac{1}{2}$ dostaniemy po przekształceniu nasze szukane (jedne z wielu możliwych) p i q. Zachodzi:

$$\frac{p}{q} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2!2^2} - \frac{1}{3!2^3} + \frac{1}{4!2^4} + \frac{1}{5!2^5} = \frac{3}{2} - \frac{7}{48} + \frac{11}{3840} = \frac{5760 - 560 + 11}{3840}$$

To ostatnie upraszcza się do $\frac{5211}{3840} = \frac{1737}{1280}$. Skąd można przyjąć:

$$(p, q) = (1737, 1280)$$

Zadanie 3. *Dla jakich $\alpha \in \mathbb{R}$ ciąg funkcyjny*

$$f_n(x) = \frac{n^\alpha x^n}{(x+1)^{n+2}}$$

jest zbieżny (a) punktowo, (b) jednostajnie na zbiorze $[0, \infty)$

Rozwiązanie: Zauważmy, że

$$f_n(x) = \frac{1}{(x+1)^2} n^\alpha (1 - \frac{1}{x+1})^n$$

Skąd dla $h : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ danej wzorem $h(x) = \frac{1}{x+1}$ oraz $g_n : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ (dla $n \in \mathbb{N}$) danych wzorem $g_n(y) = y^2 n^\alpha (1-y)^n$ dostajemy $f_n = g_n \circ h$. Oczywiście równoważność punktowej zbieżności ciągu (f_n) na zbiorze $[0, \infty)$ jest równoważna punktowej zbieżności ciągu (g_n) na zbiorze $h[[0, \infty)] = (0, 1]$. Co więcej, jeśli przez f, g oznaczymy odpowiednio punktowe granice ciągów $(f_n), (g_n)$ (dla tych α co istnieją), to z racji, że:

$$\sup_{x \in [0,\infty)} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [0,\infty)} |g_n(h(x)) - g(h(x))| = \sup_{y \in (0,1]} |g_n(y) - g(y)|$$

otrzymujemy również równoważność zbieżności jednostajnej (f_n) na $[0, \infty)$ oraz (g_n) na $(0, 1]$. W związku z tym, będziemy badać odpowiednie zbieżności dla ciągu (g_n) na zbiorze $(0, 1]$.

a) Ustalmy dowolny $x \in (0, 1]$. Wówczas mamy zbadać zbieżność ciągu liczbowego $(g_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$. Oczywiście $(x^2)_{n \in \mathbb{N}}$ jest ciągiem stałym przy ustalonym x. Natomiast ciąg $(n^\alpha (1-x)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ wraz z $n \to \infty$ zbiega do 0 dla dowolnej $\alpha \in \mathbb{R}$. Widzimy więc, że ciąg $(g_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ zbiega punktowo dla każdego $\alpha \in \mathbb{R}$ na całym $(0, 1]$. Mamy wówczas $g_n(x) \to 0$.

b) Należy zbadać zachowanie się $\sup_{x \in (0,1]} |g_n(x)|$. Liczymy pochodną funkcji g_n dostając $g_n'(x) = n^\alpha (2x(1-x)^n - nx^2(1-x)^{n-1}) = n^\alpha x(1-x)^{n-1}(2(1-x) - nx)$ Z racji, że $g_n(1) = 0$ dla każdego n, oraz $\lim_{x \to 0^+} g_n(x) = 0$, a wartości funkcji g_n na przedziale $(0, 1]$ są nieujemne, to supremum $|g_n|$ należy szukać wewnątrz (będzie więc przyjmowane, gdyż g_n przedłuża się do funkcji ciągłej na odcinku $[0, 1]$). Przyrównując pochodną do 0, dostajemy punkt $z = \frac{2}{2+n}$. Jest to jedyne miejsce zerowania się pochodnej na zbiorze $(0, 1)$ oraz jedyne (na zbiorze $(0, 1)$) ekstremum lokalne (maximum). Podstawiając do funkcji g_n punkt z, dostajemy: $\sup_{x \in (0,1]} |g_n(x) - 0| = g_n(z) = \frac{4n^2}{(2+n)^2} n^{\alpha - 2} (1 - \frac{2}{2+n})^n$. Wyrazy $(\frac{2n}{2+n})^2, (1 - \frac{2}{2+n})^n$ zbiegają do skończonych granic (niezerowych !), zatem, żeby ciąg $(g_n(z))_{n \in \mathbb{N}}$ zbiegał do 0, potrzeba i wystarcza, aby $(n^{\alpha-2})_{n \in \mathbb{N}}$ zbiegał do 0, czyli aby $\alpha < 2$.

Konkluzja: Ciąg (f_n) zbiega punktowo na zbiorze $[0, \infty)$ dla dowolnego $\alpha \in \mathbb{R}$. Zbieżność jest tam jednostajna wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha < 1$.

Zadanie 4. *Dla jakich $x > -1$ funkcja*

$$f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+x} |\ln(1+x)|$$

jest a) określona, b) ciągła, c) różniczkowalna

Rozwiązanie:
a) Jeśli $x > -1$ jest ustalony, to zauważmy, że ciąg sum częściowych szeregu $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n |\ln(1+x)|$ jest ograniczony, natomiast ciąg liczbowy $(\frac{1}{n+x})_{n\in\mathbb{N}_+}$ jest monotonicznie (maleje) zbieżny do 0, czyli na mocy kryterium Dirichleta mamy zbieżność szeregu $f(x)$, skąd określoność dla każdego $x > -1$.
b) Pokażemy niemal jednostajną zbieżność na $(-1, \infty)$ tym samym dowodząc ciągłości f na tym zbiorze. Niech więc $-1 < a < b < \infty$ będą dowolne. Pokażemy jednostajną zbieżność na $[a, b]$. Niech $g_n(x) = \frac{1}{n+x}$. Wówczas dla każdego $x \in [a, b]$ oraz $n \in \mathbb{N}_+$ mamy $g_{n+1}(x) \le g_n(x)$. Co więcej, ciąg g_n zbiega jednostajnie do 0 na zbiorze $[a, b]$ (Istotnie $|g_n(x)| \le \frac{1}{n+a} \to 0$). Niech teraz $h_n(x) = (-1)^n |\ln(1+x)|$. Wystarczyłoby pokazać, że sumy częsciowe $\sum_{n=2}^{\infty} h_n(x)$ są wspólnie ograniczone (czyli przez stałą niezależną od $x \in [a, b]$ ani $N \in \mathbb{N}$). Oczywiście zachodzi szacowanie $|\sum_{n=2}^{N} h_n(x)| \le |\ln(1+x)| \le \max\{|\ln(1+a)|, |\ln(1+b)|\}$. Czyli znów, na mocy kryterium Dirichleta, tym razem w wersji zbieżności jednostajnej, otrzymujemy jednostajną zbieżność ciągu sum częściowych f na $[a, b]$, która z uwagi na ciągłość funkcji f_n, oznacza ciągłość funkcji f na zbiorze $[a, b]$. Skoro ciągłość jest własnością lokalną, z dowolności $-1 < a < b < \infty$ oznacza to ciągłość f na zbiorze $(-1, \infty)$ (Istotnie, biorąc dowolny $x > -1$ znajdziemy takie $-1 < a < x < b < \infty$, które zaświadczą o ciągłości f na $[a, b]$, czyli również o ciągłości w naszym dowolnie wybranym punkcie $x > -1$).
c) Zaczniemy od pokazania, że f nie jest różniczkowalna w $x = 0$. Istotnie patrząc na $\frac{f(h)-f(0)}{h} = \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{(n+h)h} |\ln(1+h)| = \frac{|\ln(1+h)|}{h} \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n+h}$ widzimy (uzasadnienie ciągłości szeregu $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n+h}$ dla $h \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ jest wnioskiem z kryterium Dirichleta (por. (b)), że pochodna lewostronna f w zerze wynosi $-1 \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, natomiast pochodna prawostronna f w zerze wynosi $1 \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ (wejście z granicą pod szereg dzięki ciągłości). Z racji, że $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 1 - \ln(2)$, czyli coś niezerowego, otrzymujemy brak różniczkowalności (pochodna lewostronna i prawostronna różnią się znakiem). Pokażemy teraz, że dla $x \in (-1, 0)$ oraz $x \in (0, \infty)$ funkcja f jest różniczkowalna. Weźmy najpierw dowolny $x > 0$ oraz takie a, b, że $0 < a < x < b < \infty$. Różniczkując funkcję $f_n(x) = (-1)^n \frac{1}{n+x} \ln(1+x)$ otrzymujemy $f_n'(x) = \frac{(-1)^n}{(1+x)(n+x)} - \frac{(-1)^n \ln(1+x)}{(n+x)^2}$. Kolejny raz, na mocy kryterium Dirichleta jednostajnej zbieżności, zarówno $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+x)(1+x)}$ jak i $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln(1+x)}{(n+x)^2}$ są jednostajnie zbieżne na $[a, b]$ (ponieważ ciągi $(\frac{1}{(n+x)})_n$ $(\frac{1}{(n+x)^2})_n$ są monotonicznie jednostajnie zbieżne do 0, natomiast sumy częściowe szeregów $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+x}$ oraz $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \ln(1+x)$ są ograniczone na $[a, b]$. Oznacza to jednostajną

zbieżność $\sum_{n=2}^{\infty} f'_n(x)$ na $[a,b]$. Co więcej na mocy a) mamy zbieżność szeregu $\sum_{n=2}^{\infty} f_n(x)$ nawet w dowolnym punkcie, więc na mocy twierdzenia o różniczkowaniu szeregów funkcyjnych, dostajemy różniczkowalność f na (a,b), więc w szczególności w naszym wybranym $x > 0$. Z dowolnośći $x > 0$ mamy różniczkowalność na $(0,\infty)$. Przypadek $x \in (-1,0)$ jest zupełnie analogiczny, wybieramy $-1 < a < x < b < 0$ i w ten sam sposób pokazujemy z kryt. Dirichleta jednostajną zbieżność $\sum_{n=2}^{\infty} f'_n(x)$ na $[a,b]$ (pochodna różni się tutal tylko znakiem) wnioskując później (znów z pomocą podpunktu a) i tw. o różniczkowaniu), że mamy różniczkowalność f również w dowolnym $x \in (-1,0)$. Oznacza to różniczkowalność f na zbiorze $(-1,0) \cup (0,\infty)$

Zadanie 5. *Znaleźć granicę*

$$\lim_{x\to 1^-} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n+x}$$

Rozwiązanie: Niech $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ będzie zdefiniowana wzorem

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n+x}$$

Zauważmy, że na mocy kryterium Dirichleta, dla $x \in [0,1]$ funkcja f jest dobrze określona. Istotnie: sumy częściowe szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^n$ są ograniczone na $[0,1]$ (jest to szereg geometryczny, który umiemy wysumować: $|\sum_{n=1}^{N}(-x)^n| = |(-x)\frac{1-(-x)^N}{1+x}| \le 2$). Co więcej, ciąg funkcyjny $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$, gdzie $h_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ są dane wzorem $h_n(x) = \frac{1}{n+x}$, jak już wiemy, zbiega zarówno punktowo jak i jednostajnie do 0 na całej swojej dziedzinie. Skoro dla $x \in [0,1]$ oraz $n \in \mathbb{N}$ mamy $h_{n+1}(x) \le h_n(x)$, to na mocy kryt. Dirichleta (odpowiednio w wersji punktowej i jednostajnej) mamy zarówno określoność jak ciągłość funkcji f (tutaj również ważna ciągłość każdej funkcji $x \to \frac{(-x)^n}{n+x}$ na przedziale $[0,1]$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$). Oznacza to, że uzasadnione jest przejście z granicą:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

Widzimy podobieństwo do rozwinięcia logarytmu naturalnego, brakuje tylko pierwszego wyrazu. Dodajmy zatem i odejmijmy 1, dostając:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} - 1 = \ln(2) - 1$$